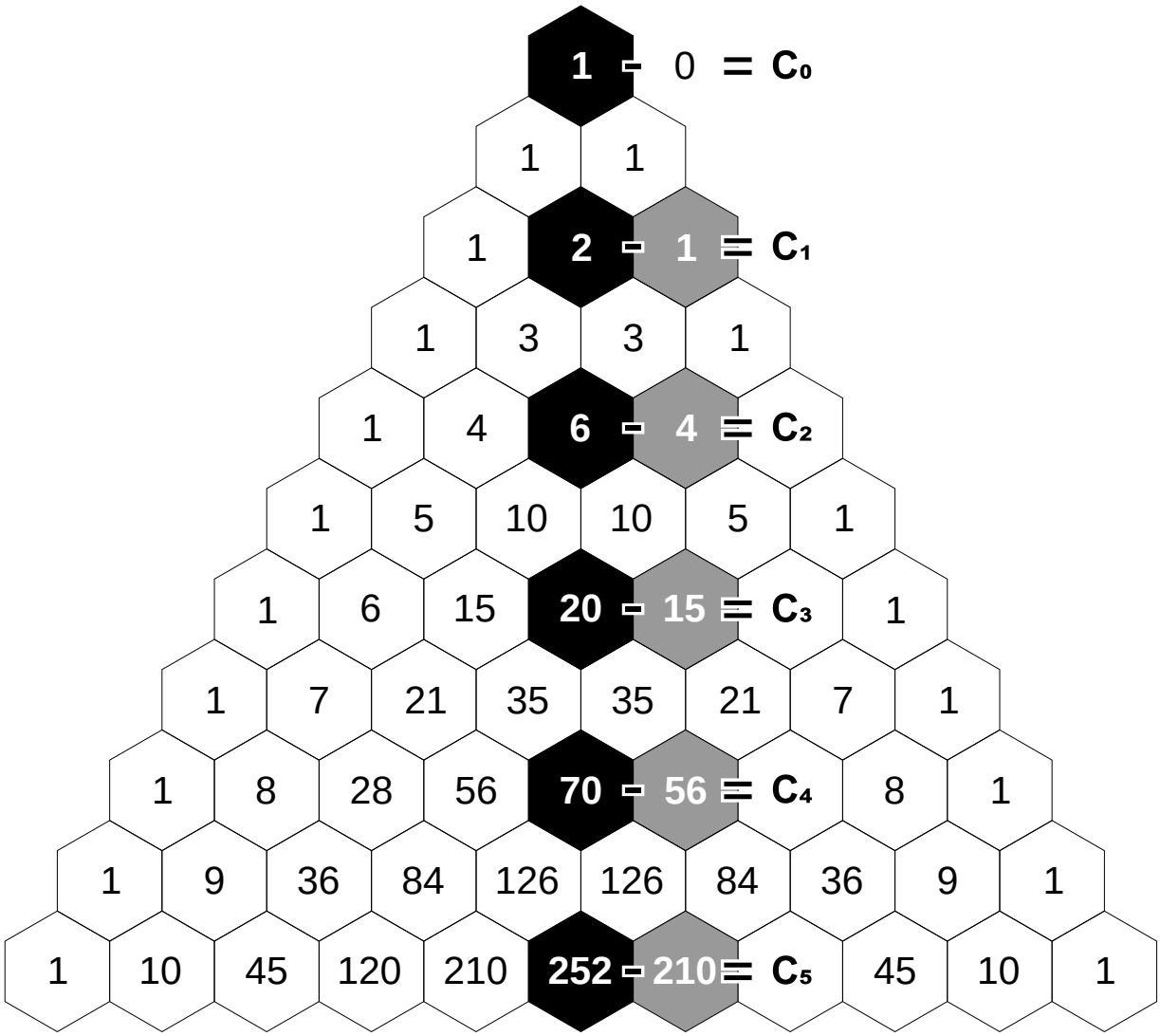


I numeri di Catalan sono ancora più affascinanti dei numeri di Fibonacci.
Sono come la Stella Polare nel cielo della sera,
una luce bella e luminosa nei cieli matematici.
Thomas Koshy



APPUNTI ED ESERCIZI

di Sandro Campigotto

TEORIA

INTRODUZIONE

Se c'è una sequenza matematica che ama "imbucarsi" nei posti più inaspettati, è sicuramente quella dei numeri di Catalan. In combinatoria e nell'informatica teorica, questi numeri compaiono ogni volta che ci si chiede: "In quanti modi diversi posso organizzare o strutturare un insieme di elementi senza infrangere determinate regole di validità?"

Prendono il nome dal matematico franco-belga Eugène Charles Catalan, anche se vennero studiati per la prima volta da Eulero circa un secolo prima.

NUMERI DI CATALAN

$$C_0 = 1 \qquad C_1 = 1 \qquad C_2 = 2 \qquad C_3 = 5 \qquad C_4 = 14$$
$$C_5 = 42 \qquad C_6 = 132 \qquad C_7 = 429 \qquad C_8 = 1430 \qquad C_9 = 4862$$

FORMULE

Formula di Eulero

$$C_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}$$

Formula ricorsiva di Eulero

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

Formula di Catalan

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Formula di Segner

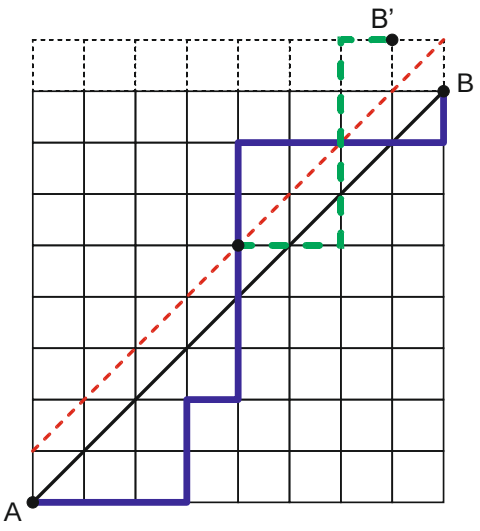
$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

EQUIVALENZA TRA LE FORMULE DI CATALAN E DI SEGNER

Risolviamo il problema di determinare il numero dei percorsi su una griglia quadrettata che non superano la diagonale:

Formula di Catalan.

In una griglia $n \times n$ il numero dei percorsi che vanno dal punto A in basso a sinistra al punto B in alto a destra sono $\binom{2n}{n}$.



Sfruttando il principio di riflessione, i percorsi che attraversano la diagonale, riflessi rispetto alla linea tratteggiata dal primo punto del percorso che la attraversa, sono i percorsi che dal punto A giungono al punto B' e sono $\binom{2n}{n+1}$.

I percorsi che non attraversano la diagonale sono

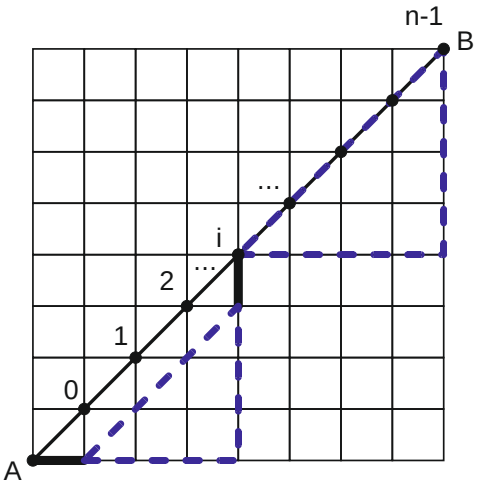
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Formula di Segner

Detto C_n il numero dei percorsi che stanno sotto alla diagonale di un quadrato $n \times n$; sia i il primo nodo della diagonale che viene toccato dal percorso (eventualmente il nodo B), abbiamo che il primo tratto è obbligato; ci sono C_i percorsi per raggiungere il punto sotto l'i-esimo nodo; un altro tratto obbligato; ed infine C_{n-1-i} possibili percorsi che ci portano al punto B.

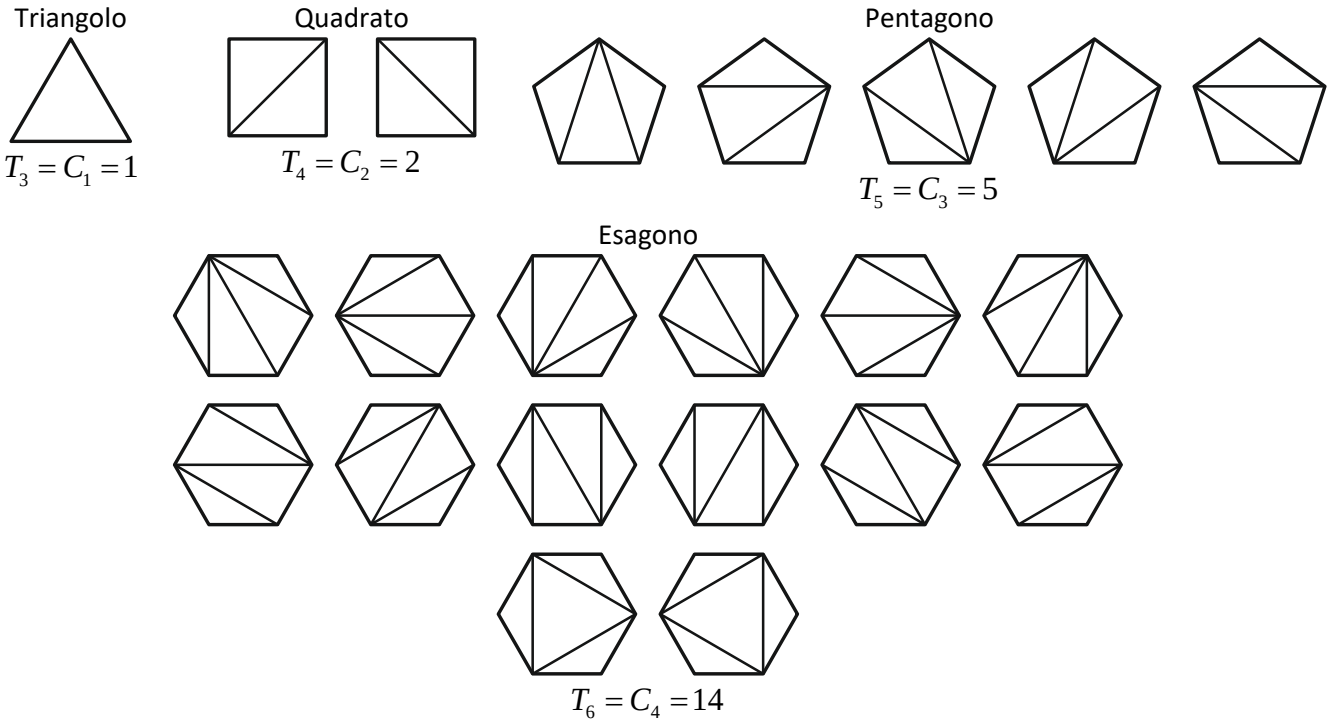
C_n è la somma di tutte le possibilità descritte, quindi da $i = 0$ fino a $i = n-1$:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

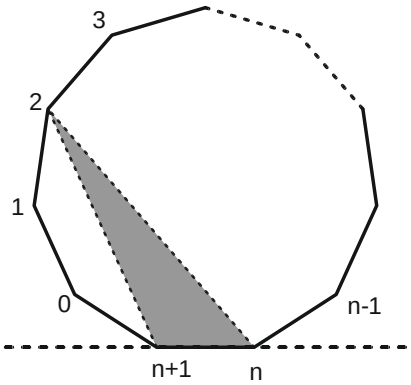


TRIANGOLAZIONE DEI POLIGONI

Si vuole dividere in triangoli un poligono di $n+2$ lati utilizzando alcune delle sue diagonali



In generale, sia dato un poligono di $n+2$ lati, numerati i vertici da 0 a $n+1$, sia fissato il lato da n a $n+1$;



Sia C_n il numero dei modi per triangolare un poligono di $n+2$ lati.

Passando in rassegna ogni vertice del poligono partendo dal vertice 0 fino al vertice $n-1$ possiamo formare un triangolo con il lato fissato e il vertice scelto. I poligono rimane diviso in due altri poligoni. Se abbiamo scelto l'i-esimo vertice, a sinistra avremo un poligono di $i+2$ lati (che si triangola in C_i modi) mentre a destra $n+1-(i+1)+1 = n-i+1$ lati (che si triangola in C_{n-1-i} modi)

$$T_{n+2} = C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

Che è proprio la formula di Segner.

ESERCIZI

Come avrai intuito, la soluzione agli esercizi coinvolge sempre i numeri di Catalan. La vera sfida non è trovare il valore finale, ma comprendere il legame logico: come e perché il problema sia riconducibile ai numeri di Catalan.
Quello che puoi fare è:

- *collegare il nuovo problema ad uno dei problemi già risolti (creando una biiezione tra le soluzioni del nuovo e del vecchio problema*
- *risolvere il problema ricorsivamente trovando la formula di Segner*
- *dividere il problema per riconoscere in una parte di esso i numeri di Catalan*

In fondo a questi appunti troverai delle possibili soluzioni.
Le ★ indicano la difficoltà presunta dell'esercizio.

1. PAROLE DI DYCK (★)
Una parola di Dyck è una stringa composta da n simboli X (aperture) e n simboli Y (chiusure), in cui ogni prefisso contiene un numero di X maggiore o uguale a quello delle Y
Ad esempio, con 6 lettere sono "XXXYYY" "XYXXYY" "XYXYXY" "XXYYXY" "XXYXYY".
Quante sono le parole di Dyck di lunghezza 2n?

2. PROBLEMA DELLE PARENTESI BEN POSTE (★)
In quanti modi sia possibile disporre n coppie di parentesi in modo che risultino corrette, cioè che ogni parentesi aperta venga correttamente chiusa.

3. PROBLEMA DELLE STRETTE DI MANO (★)
In quanti modi diversi 10 persone sedute attorno ad un tavolo possono darsi una stretta di mano in modo che ciascuno stringa la mano ad una altro commensale e non ci siano incroci tra le braccia.

4. PROBLEMA DI ERDOS (★)
Supponiamo di avere lo stesso numero di "+1"e"-1" e di disporli in modo consecutivo in un ordine qualsiasi. Prendendo ad esempio due "+1"e due "-1" otteniamo sei righe diverse:
+1+1-1-1 OK
+1-1+1-1 OK
-1+1-1+1 NO
-1+1+1-1 NO
-1-1+1+1 NO
+1-1-1+1 NO
Il problema di Erdos consiste nel determinare il numero di righe che non hanno mai somme parziali negative, ovviamente ogni riga ha come somma totale zero.

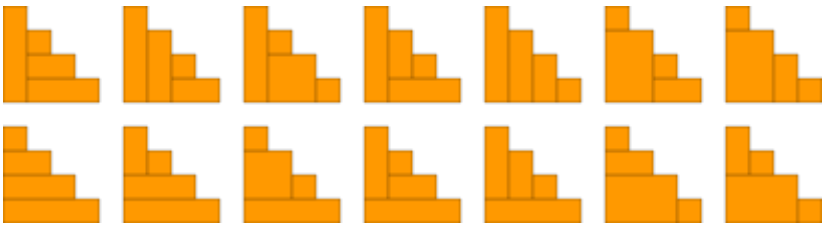
5. PERCORSI DI DYCK ("MONTAGNE") (★)
Un percorso di Dyck di ordine n è un cammino su un reticolato a partire da (0,0) fino a (2n,0) usando solo passi diagonali verso l'alto (↗) e verso il basso (↘), senza mai scendere sotto l'asse delle x.

6. PROBLEMA DEL TEATRO (★)
Una coda si forma davanti al botteghino di un teatro. Il biglietto costa 10€ e alla cassa si presenta un gruppo di persone metà delle quali ha la cifra esatta e l'altra metà necessiti di resto, avendo solo una banconota da 20€. In quanti modi i clienti possono mettersi in fila per far si che la cassa abbia sempre il resto da dare al cliente in coda? (Inizialmente al botteghino la cassa è vuota.)

7. VITTORIA INSPERATA (★)
Una partita di calcio è finita con il punteggio di 4-3. In quanti modi possono essersi succedute le reti se la squadra che alla fine ha vinto non è mai stata in vantaggio durante il resto della partita?

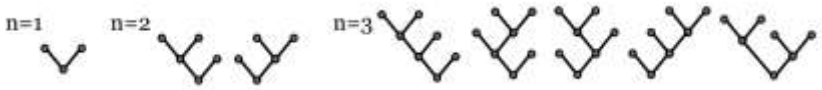
8. UN MONDO DI SCALE (★★)

Qual è il numero di possibili tassellazioni di una scala di n gradini con n rettangoli. Ad esempio, per n=4 si ottiene



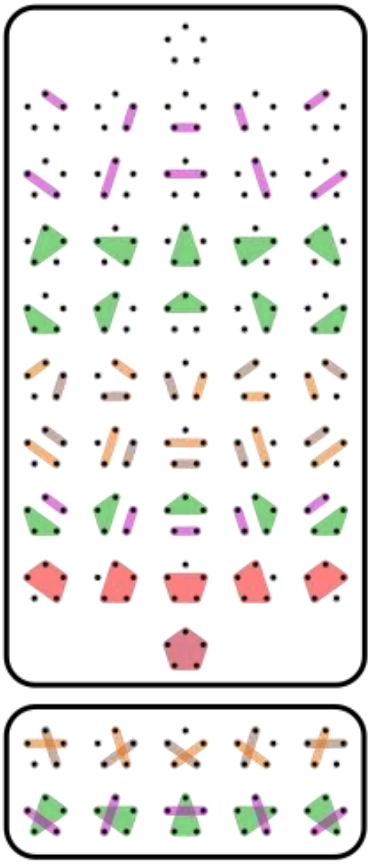
9. ALBERI BINARI (★★)

Quanti alberi binari possiamo costruire con n nodi interni



10. PARTIZIONI NON INCROCIATE (★★★)

Una partizione si definisce "non incrociata" se, disponendo gli elementi in cerchio o in fila, le linee che uniscono gli elementi dello stesso sottoinsieme non si intersecano mai.



Per esempio, vi sono $C_4 = 14$ partizioni non incrociate di un insieme di 4 elementi { A, B, C, D } e sono:

- { A, B, C, D };
- { A }, { B, C, D };
- { A, C, D };{ B },
- { A, B, D };{ C },
- { A, B, C };{ D },
- { A, B } { C, D };
- { A, D } { B, C };
- { A, B } { C }, { D };
- { A, C } { B }, { D };
- { A, D } { B }, { C };
- { A }, { B, C } { D };
- { A }, { B, D } { C };
- { A }, { C, D } { B };
- { A }, { B } { C }, { D }.

È esclusa la partizione { A, C } { B, D }, perché contiene un “incrocio”.

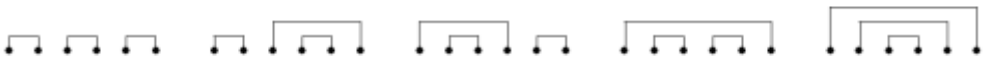
In figura le partizioni non incrociate di 5 elementi.

Quante sono le partizioni non incrociate di n elementi?

11. ARCHI CONNESSI (★★)

In quanti modi posso collegare $2n$ punti giacenti su una retta in un piano con n archi non intersecanti tra di loro, ciascuno collegato a due punti e giacenti ad di sopra della retta?

Esempio con $n = 3$.



12. PILE DI MONETE (★★)

In quanti modi diversi possiamo disporre delle monete partendo da una base di n

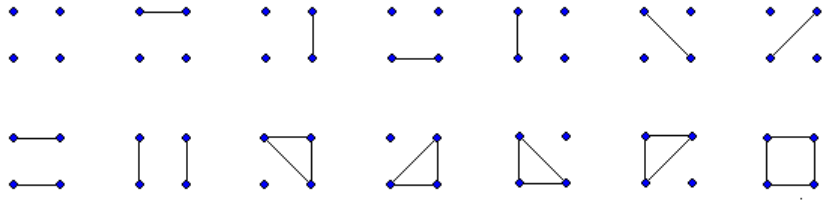


13. PROBLEMA DELLA TABELLA (★★)

Ho una tabella $n \times 2$ e devo scriverci dentro i numeri da 1 a $2n$ in modo che i numeri a destra siano più grandi di quelli a sinistra della stessa riga, e i numeri in basso siano più grandi di quelli scritti in alto nella stessa colonna.

14. DIVISIONI (★★)

In quanti modi posso unire i vertici di un poligono convesso di n lati usando segmenti che non si intersecano per formare poligoni, punti isolati e segmenti? Nell'immagine un esempio con n=4.



15. SEQUENZA 1 (★)

In quanti modi si può scegliere una successione a_n di n numeri naturali in modo che $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ con $a_i \le i$

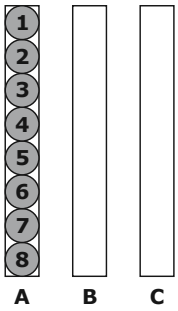
16. SEQUENZA 2 (★★)

In quanti modi si può scegliere una successione a_n di n numeri naturali in modo che $a_1 = 0$ e $\forall i$ $0 \le a_{i+1} \le a_i + 1$. (Ad esempio per $n = 3$ le sequenze possibili sono: 000 - 001 - 010 - 011 - 012)

17. PERMUTAZIONI POSSIBILI (★)

In un tubo di vetro sono contenute otto palline numerate da 1 a 8 in ordine crescente dall'alto verso il basso (vedi figura). A fianco vi sono altri due tubi di vetro. Le possibili procedure di spostamento sono:
- prendere la pallina più in alto dal tubo A e metterla nel tubo B;
- prendere la pallina più in alto dal tubo B e metterla nel tubo C.

Dopo 16 mosse, tutte le palline si troveranno nel tubo C. Quante sono le diverse possibili configurazioni delle palline nel tubo C?



18. PRATICHE AL MINISTERO (★)

Pinco Pallino lavora al Ministero del Benessere dell'isola Kenoncè. La sua occupazione è sbrigare le 8 pratiche che vengono via via messe in pila sulla sua scrivania durante la giornata, ciascuna contrassegnata con un numero da 1 a 8, che indica l'ordine con cui la pratica gli è stata portata.
Pallino però non svolge la pratiche nell'ordine con cui arrivano ma, ogni volta che ne ha finita una, ne prende un'altra dalla cima della pila che si è formata fino a quel momento sulla sua scrivania.
Ad esempio, se arriva tardi e le 8 pratiche sono già tutte impilate sulla sua scrivania, le sbrigherà in ordine inverso. Se invece è molto veloce e riesce sempre a terminare una pratica prima che arrivi la successiva, allora le svolgerà esattamente nell'ordine con cui arrivano. La maggior parte delle volte, comunque, gli capita di svolgerle in un ordine che non è né quello di arrivo né quello inverso.
In quanti possibili ordini diversi può capitargli di svolgere le pratiche?

19. PERCORSI NEL PRIMO QUADRANTE (★★)

Spostandosi solamente sui punti a coordinate positive o nulle su un piano cartesiano, usando le mosse $(+1;0)$ $(-1;0)$ $(0;+1)$ $(0;-1)$, quanti percorsi di 10 passi esistono che partendo dall'origine vi ritornano dopo 10 passi. (È possibile ripassare su punti già toccati)
(Risolvi il caso generale di $2n$ passi)

20. FUNZIONI DEBOLI (★★★)

Dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, dire quante sono le funzioni $f : A \to A$ debolmente crescenti e tali che inoltre $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{2026}(n) = 10$ per ogni $n \in A$.

21. GIOCANDO A CARTE (★★)

Barbara e Simona giocano a carte. Mescolano un mazzo di 10 carte, numerate da 1 a 10, e se ne distribuiscono casualmente 5 a testa. Ciascuna dispone le proprie carte davanti a sé in ordine decrescente. Successivamente, si confrontano le carte in ordine: la prima di Simona con la prima di Barbara, la seconda con la seconda, e così via per 5 prese. Ogni presa è vinta dal giocatore che possiede la carta con il valore più alto. La partita viene vinta da chi riesce ad aggiudicarsi tutte e 5 le prese. Se nessuno dei due giocatori ci riesce, la partita termina in parità.
Qual è la probabilità che una partita termini in parità?

22. TOP MODEL PER UN MINUTO (problema 20 Finale Femminile 2025) (★★★)

Candace vuole a tutti i costi diventare una supermodella, ma non sa che nel frattempo i suoi fratelli stanno creando una linea d'abiti intitolata “È sempre estate”. I ragazzi disegnano dei parei da spiaggia, partendo da un pezzo di stoffa a forma di triangolo rettangolo isoscele. Disegnano poi alcune altezze con la seguente strategia: tracciano prima di tutto l’altezza relativa alla base del grande triangolo, poi disegnano una delle altezze (sempre relativa alla base) di uno qualunque dei triangoli rettangoli isosceli presenti nella figura e procedono in questo modo fino a dividere il triangolo iniziale in esattamente 10 triangoli rettangoli isosceli. L’idea viene subito copiata da un famoso stilista e diventa un successo. Quanti diversi capi di abbigliamento costruiti in questa maniera possono essere realizzati?

SOLUZIONI

1. PAROLE DI DYCK
Usando i percorsi sotto alla diagonale: "X"= "→" "Y"="↑"

2. PROBLEMA DELLE PARENTESI BEN POSTE
Usando i percorsi sotto alla diagonale: "("= "→" ")"="↑"

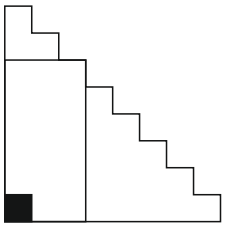
3. PROBLEMA DELLE STRETTE DI MANO
Partendo da una posizione qualsiasi e leggendo i collegamenti in uno dei due sensi: ad una nuova stretta di mano associo "(" mentre alla chiusura di una stratta di mano associo ")".
Il problema è equivalente al PROBLEMA 2. In particolare con 10 persone la soluzione è $C_5 = 42$.

4. PROBLEMA DI ERDOS
Usando i percorsi sotto alla diagonale: "+1"= "→" "-1"="↑"

5. PERCORSI DI DYCK ("MONTAGNE")
Sono esattamente i percorsi sotto alla diagonale, ruotando il quadrato in modo da mettere la diagonale orizzontale (e sviluppando i percorsi al di sopra di essa).

6. PROBLEMA DEL TEATRO
Usando i percorsi sotto alla diagonale: "10€"= "→" "20€"="↑"

7. VITTORIA INSPERATA
Usando i percorsi sotto alla diagonale: "segna B"= "→" "Segna A"="↑" fino al pareggio 3-3. Poi alla fine segna A.

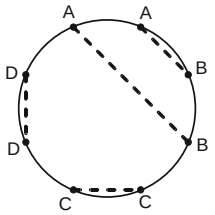
8. UN MONDO DI SCALE

Fissiamo l'attenzione sul quadratino in basso a sinistra, esso appartiene sicuramente ad un rettangolo. Questo rettangolo divide la scala in due scale Se R_n è il numero dei modi per tassellare con rettangoli una scala di n gradini, allora la scala superiore si tassella in R_i modi, mentre quella inferiore in R_{n-1-i} modi. $R_n = \sum_{i=0}^{n-1} R_i R_{n-1-i}$

9. ALBERI BINARI
Basta leggere gli alberi a partire da sinistra verso destra. Ad esempio per gli alberi rappresentati:



SD SSDD SDSD SSSDDD SSDSDD SDSSDD SDSDSD SSDDSD

Il problema è equivalente al PROBLEMA 1

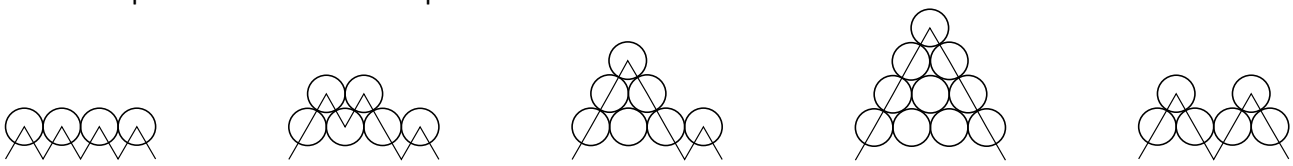
10. PARTIZIONI NON INCROCIATE


Rappresentiamo l'insieme su una circonferenza. Raddoppiando il numero degli elementi e chiamando due punti vicino con la stessa lettera.
Il problema è equivalente al PROBLEMA 3.
Nell'immagine, in particolare è rappresentato il caso {A,B} {C}, {D};

11. ARCHI CONNESSI
Chiudendo i punti in cerchio (con i collegamenti all'interno del cerchio) il problema è equivalente al PROBLEMA 3

12. PILE DI MONETE

Il problema è equivalente al PROBLEMA 5 costruendo le montagne partendo dall'esterno e collegando i centri delle monete più esterne. Alcuni esempi con base $n=4$:



13. PROBLEMA DELLA TABELLA

Usando i percorsi sotto alla diagonale: procedo in ordine numerico. Se il percorso è "→" metto il numero nella prima cella disponibile in alto; se il percorso è "↑" metto il numero nella prima cella disponibile in basso.

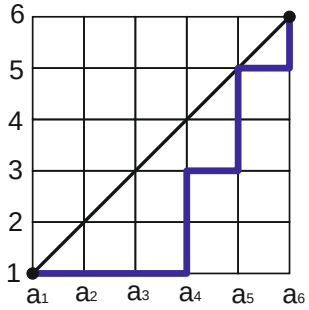
14. DIVISIONI

Il problema è equivalente al PROBLEMA 10 chiamando in ordine orario i punti del poligono ABCD…

15. SEQUENZA 1

Il problema è equivalente ai percorsi sotto alla diagonale. Consideriamo un quadrato $(n+1)\times(n+1)$, numeriamo in verticale a partire dal livello 0 e chiamiamo le verticali con la successione a_n (in figura il caso $n=6$)

Il vincolo $a_i \le i$ equivale a rimanere sotto la diagonale. Il valore del numero a_i equivale alla massima altezza raggiunta. In figura la sequenza è 1-1-1-1-3-5-6



16. SEQUENZA 2

Il problema si risolve analogamente al problema precedente, dove i valori a_i rappresentano la distanza tra l'altezza raggiunta e la diagonale senza considerare l'ultimo passo che è sempre 0.
Nel disegno dell'esercizio precedente la sequenza è 01210

17. PERMUTAZIONI POSSIBILI

Usando i percorsi sotto alla diagonale: "mossa 1"= "→" "mossa 2"="↑".
In questo caso la soluzione è $C_8 = 1430$.

18. PRATICHE AL MINISTERO

Usando i percorsi sotto alla diagonale: "arriva la pratica"= "→" "sbriga l'ultima pratica arrivata"="↑"
La soluzione è $C_8 = 1430$.

19. PERCORSI NEL PRIMO QUADRANTE

Scomponiamo il problema: orizzontale, verticale

5 destra-sinistra C_5 - 0 in alto-basso C_0

4 destra-sinistra C_4 - 1 in alto-basso C_1. Nella sequenza OOOOOOOOVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{2}$ modi

3 destra-sinistra C_3 - 2 in alto-basso C_2. Nella sequenza OOOOOOVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{4}$ modi

2 destra-sinistra C_2 - 3 in alto-basso C_3. Nella sequenza OOOOVVVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{6}$ modi

1 destra-sinistra C_1 - 4 in alto-basso C_4. Nella sequenza OOVVVVVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{8}$ modi

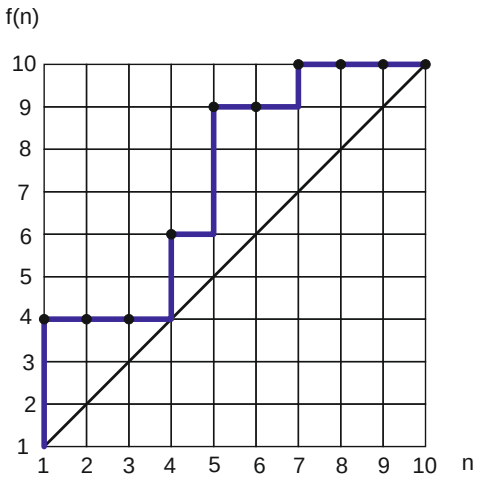
0 destra-sinistra C_0 - 5 in alto-basso C_5.

In totale $2(42\cdot 1+14\cdot 1\cdot 45+2\cdot 5\cdot 210)=5544$.In generale $\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}C_iC_{n-i}$

20. FUNZIONI DEBOLI

Osserviamo che

- $f : A \to A$ debolmente crescente implica $f(x) \le f(y) \ \ \forall x < y$;
- se $f(10) < 10$ la condizione $f^{(2026)}(n) = 14$ non potrebbe essere verificata, quindi $f(10) = 10$;
- Se accadesse che $f(n) = n$ per $n \neq 10$ allora si formerebbe una catena costante al valore di n e non sarebbe verificata la condizione $f(10) = 10$.
- Deve accadere sempre che $f(n) \ge n+1$



Rappresentando su una griglia quadrettata possiamo associare un qualunque percorso sopra alla diagonale ad una di queste funzioni. Nell'esempio abbiamo

$f(1) = f(2) = f(3) = 4,$
$f(4) = 6,$
$f(5) = f(6) = 9,$
$f(7) = f(8) = f(9) = f(10) = 10.$

I percorsi sopra alla diagonale sono $C_{10} = 16796$

21. GIOCANDO A CARTE

Il problema è equivalente al PROBLEMA 13 dove la prima riga corrisponde alle carte di Barbara e la seconda a quelle di Simona.

La probabilità cercata è: $P(\text{patta}) = 1 - P(\text{vince B. o S.}) = 1 - \dfrac{C_5 + C_5}{\binom{10}{5}} = 1 - \dfrac{42+42}{252} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}.$

22. TOP MODEL PER UN MINUTO

Sia $T_n = \text{"numero dei modi per ottenere } n+1 \text{ triangoli ottenuti tracciando } n \text{ altezze"}$. $T_0 = 1$ visto che se non traccio alcuna altezza ho solo il triangolo iniziale.

Osserviamo che $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} T_i \cdot T_{n-i-1}$ che traduce l'idea che se ho tracciato i altezze a destra della prima altezza, me ne rimangono esattamente $n-i-1$ da tracciarne a sinistra.

La ricorsione ottenuta è quella di Segner: $T_n = C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Nel nostro caso $T_9 = C_9 = 4862$.

BIBLIOGRAFIA

Richard Stanley, Catalan Numbers, 2015, Cambrige University Press
Martin Gardner, Viaggio nel tempo e altre stranezze matematiche, 2008, RBA Italia.

SITOGRAFIA

https://it.wikipedia.org/wiki/Numero_di_Catalan
https://brilliant.org/wiki/catalan-numbers/
https://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html

assolutamente da vedere:
https://www.youtube.com/watch?v=kjn9hFQK9aQ&t=18s

CONTATTI
Sandro Campigotto: sandro@campigotto.it